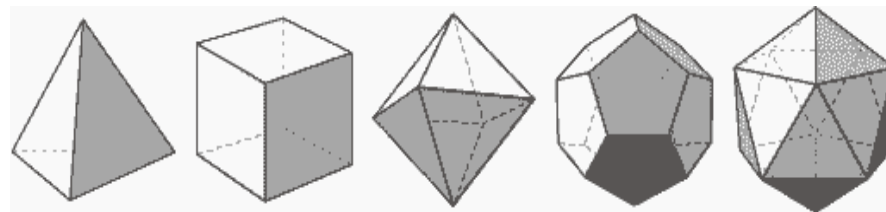


オイラーの公式とは？

筑陽学園高等学校2年 野田尚貴

オイラーの公式 (3次元)

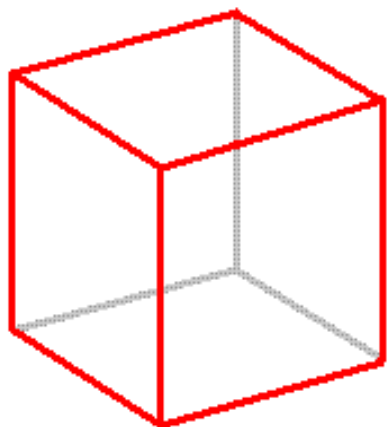
(凸な多面体である時)



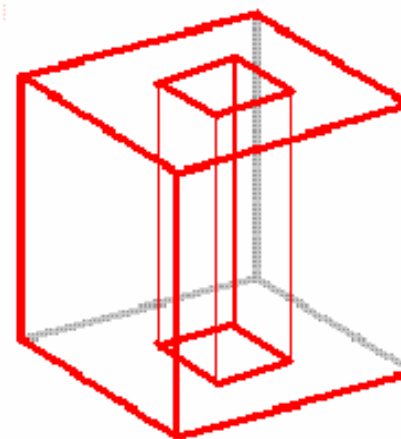
$$v - e + f = 2$$

が成り立つ。

(v ・・・頂点の数、 e ・・・辺の数、 f ・・・面の数)



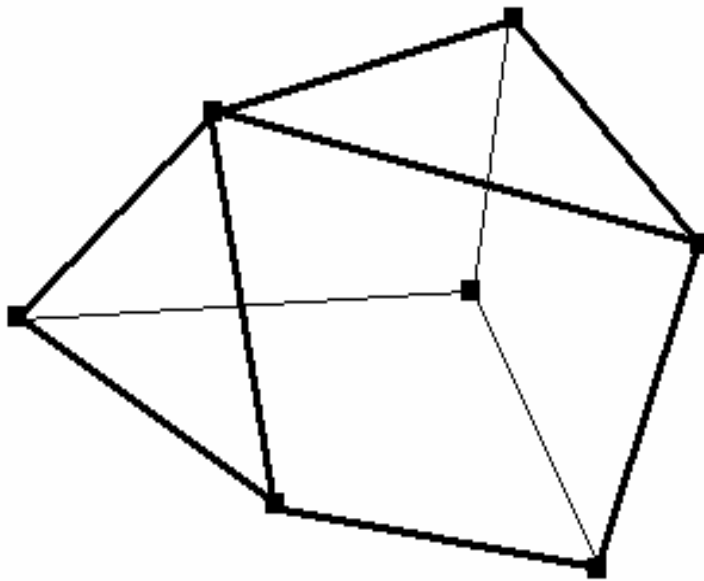
凸



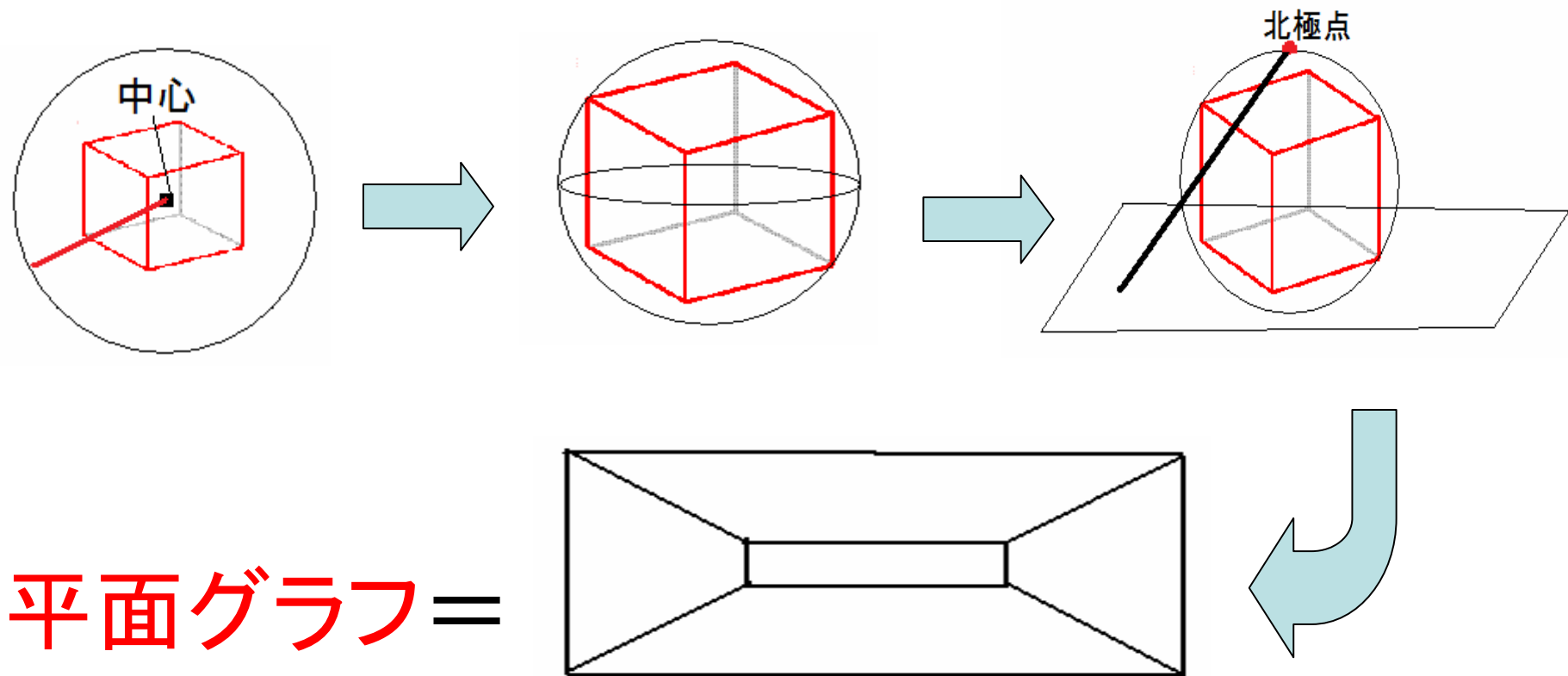
凸ではない

	頂点の数(v)	辺の数(e)	面の数(f)
正四面体	4	6	4
正六面体	8	12	6
正八面体	6	12	8
正十二面体	20	30	12
正二十面体	12	30	20

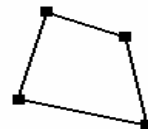
正多面体以外ではどうなのか？



ここで正多面体以外の
凸な多面体を1つ用意した。
この図形を見ると、
頂点7個、辺11本、
面は6個なので、
この場合においても
 $v - e + f = 2$ が成り立つこと
が分かる。



- ・できる平面上のグラフは各辺の点のみで交わる。
- ・凸な多面体の点・辺・面の個数は、平面グラフの点・辺・領域(外側も含む)の数と一致する。
- ・連結グラフとなる。



は×

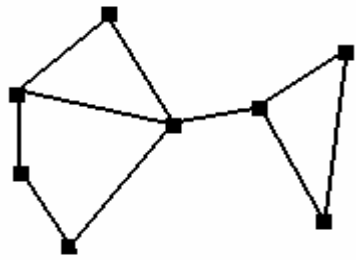
【定義】 X をグラフとする。

① Y が X の部分グラフ $\Leftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \cdot Y \text{ の頂点は全て } X \text{ の頂点} \\ \cdot Y \text{ の辺は全て } X \text{ の辺} \end{array} \right.$

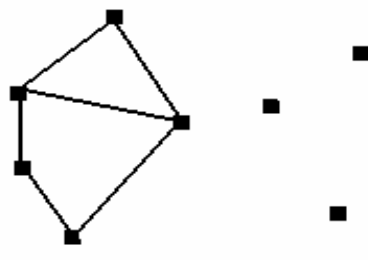
② サイクル: 全ての頂点から出ている辺の数が2である X の部分グラフ

③ 木 (tree): サイクルを持たない X の部分グラフ

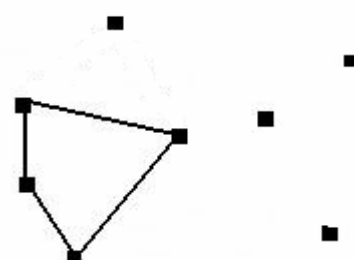
※ tree において、 $v - e = 1$ 、平面上の tree なら $f = 1$



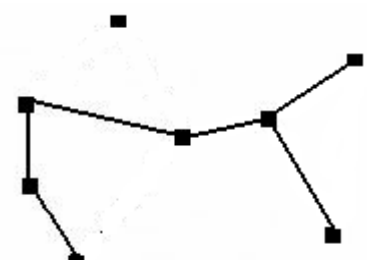
グラフ



部分グラフ

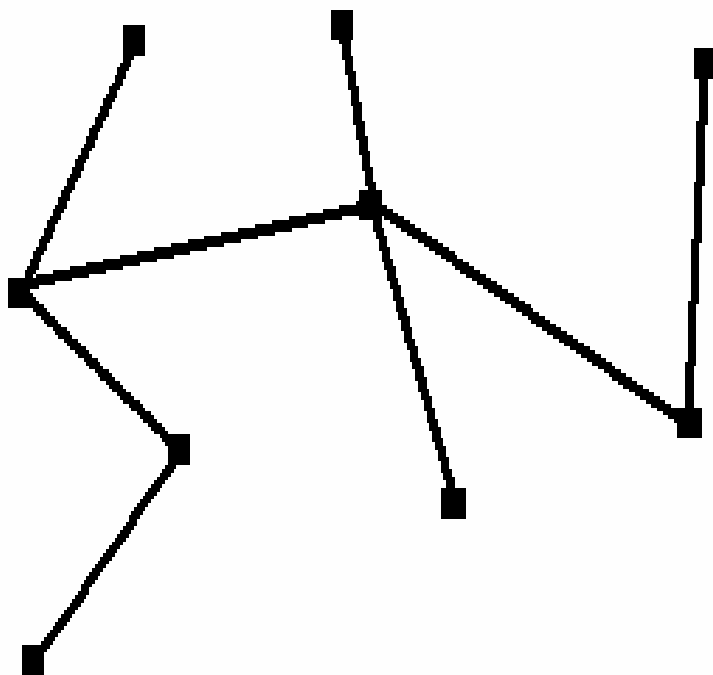


サイクル



tree

なぜ、treeの場合 $v - e = 1$ か？



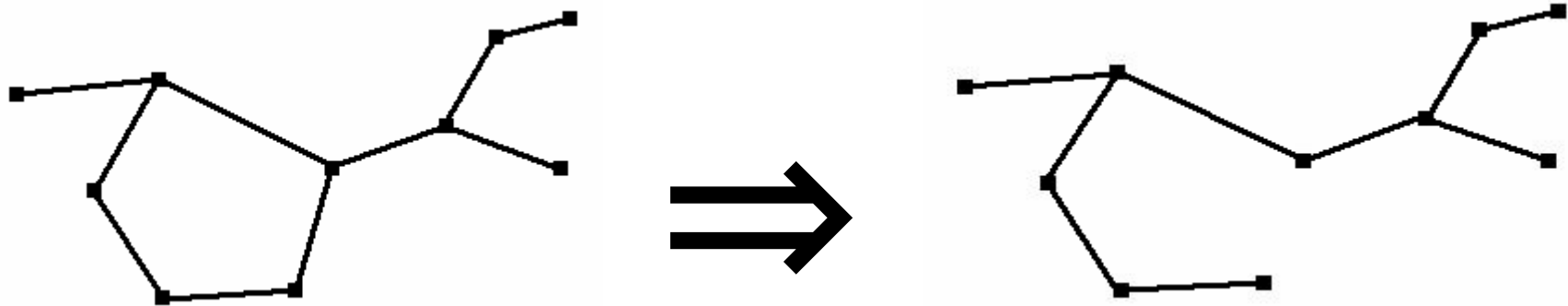
- ・treeの場合、頂点から出ている辺の本数が必ず1のものがあるため、グラフの頂点の個数と辺の個数についての**数学的帰納法**を使うことで必ず $v - e = 1$ が成り立つことを示せる。

- ・出来た平面グラフがtreeの場合

$$v - e = 1, f = 1 \text{ より}$$

$$v - e + f = 2 \text{ が成り立つ。}$$

- ・出来たグラフがtreeではない場合



辺を1本減らすことで、領域も1つ減るので、この場合も $v - e + f = 2$ が成り立つ。またこれは頂点の数と辺の数に関する**数学的帰納法**で示せる。